Tesselações pentagonais e mosaicos de Penrose

Douglas de Araujo Smigly

28 de outubro de 2017, v-1.9.6

Sumário

1. O que são tesselações?
2. Tipos de tesselações
3. Tesselações pentagonais
4. Mosaicos de Penrose
5. Referências

O que são tesselações?

Uma tesselação, também chamada de ladrilhamento, pavimentação ou mosaico consiste no recobrimento de uma superfície bidimensional (um plano) utilizando como unidades básicas polígonos, congruentes ou não, de modo que não existam entre os polígonos:

- Espaços;

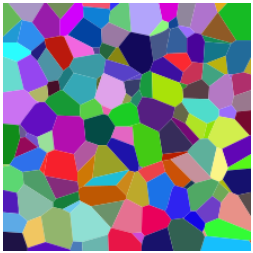


Figura: Tesselação de Vonoroy

O que são tesselações?

Uma tesselação, também chamada de ladrilhamento, pavimentação ou mosaico consiste no recobrimento de uma superfície bidimensional (um plano) utilizando como unidades básicas polígonos, congruentes ou não, de modo que não existam entre os polígonos:

- Espaços;
- Sobreposições.

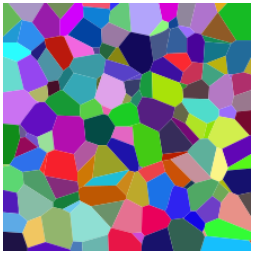


Figura: Tesselação de Vonoroy

O que são tesselações?

Uma tesselação, também chamada de ladrilhamento, pavimentação ou mosaico consiste no recobrimento de uma superfície bidimensional (um plano) utilizando como unidades básicas polígonos, congruentes ou não, de modo que não existam entre os polígonos:

- Espaços;
- Sobreposições.

A superfície considerada por ser finita ou infinita, sendo possíveis generalizações para dimensões mais elevadas.

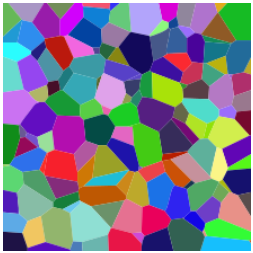


Figura: Tesselação de Vonoroy

Ao longo da história de arte, encontram-se tesselações desde a arquitetura antiga até a arte moderna.
Maurits Cornelis Escher produziu obras de arte onde aparecem tesselações com alguma frequência.

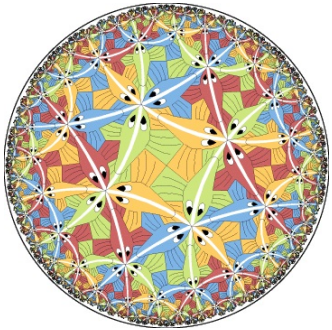


Figura: Algumas das obras de Escher: *Circle Limit III* e *Pegasus nº 105* (1959)

As tesselações também estão presentes na disposição dos átomos em sólidos, que são importantes no estudo da cristalografia, que trabalha principalmente com os cristais, sendo formados por conjuntos de átomos organizados no espaço periodicamente.
A observação de padrões pode ser fundamental para compreender propriedades físicas e químicas desses materiais.

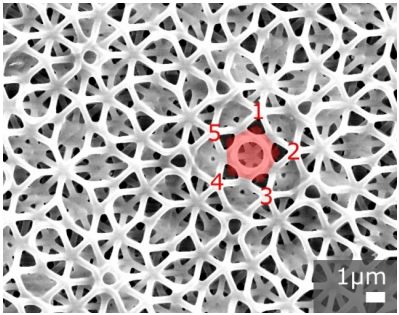


Figura: Padrão pentagonal de simetria de um quasicristal observado num microscópio eletrônico

A geração de mosaicos pode ser feita a partir de alguns ladrilhos (polígonos), como exemplifica a tabela abaixo:

Name	Initial tiles	Generation 1	Generation 2	Generation 3
Half-kite				
Half-dart				
Sun				
Star				

Tipos de tesselações

- Tesselações regulares
  As coberturas feitas com padrões construídos repetindo polígonos regulares são chamadas de tesselações regulares. Há apenas três possíveis tesselações regulares: com triângulos, quadrados e hexágonos.

Tipos de tesselações

- Tesselações regulares
  As coberturas feitas com padrões construídos repetindo polígonos regulares são chamadas de tesselações regulares. Há apenas três possíveis tesselações regulares: com triângulos, quadrados e hexágonos.

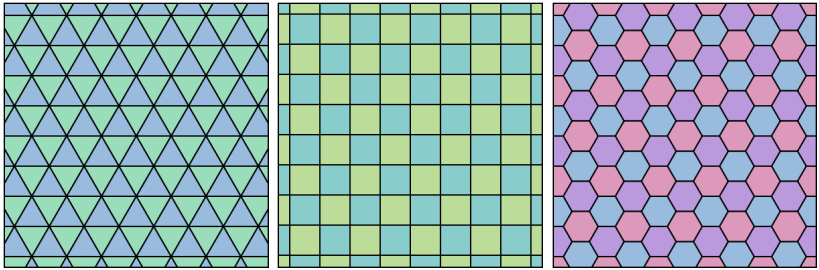
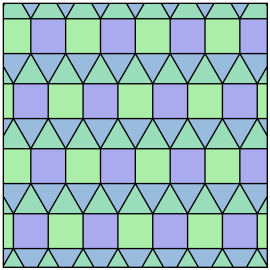


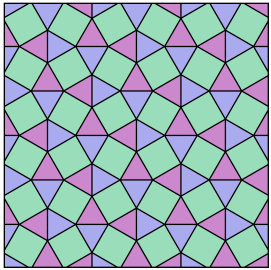
Figura: As tesselações regulares: $\{3,6\} - 3^6$, $\{4,4\} - 4^4$ e $\{6,3\} - 6^3$.

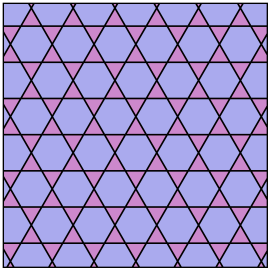
- Tesselações semirregulares

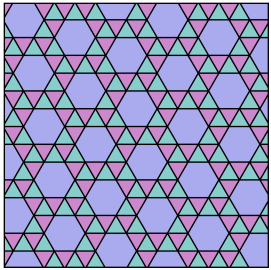
  Tesselações feitas com dois ou mais polígonos regulares são chamadas de tesselações semirregulares. O padrão em cada vértice tem que ser exatamente o mesmo; neste caso, há oito possíveis padrões. Também são chamadas de tesselações arquimedianas. As tesselações semirregulares são:

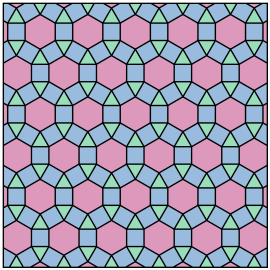
  - $\{3,3,3,4,4\} - 3^3 \cdot 4^2$
  - $\{3,6,3,6\} - (3 \cdot 6)^2$
  - $\{3,4,6,4\} - 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4$
  - $\{4,8,8\} - 4 \cdot 8^2$
  - $\{3,3,4,3,4\} - 3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$
  - $\{3,3,3,3,6\} - 3^4 \cdot 6$
  - $\{3,12,12\} - 3 \cdot 12^2$
  - $\{4,6,12\} - 4 \cdot 6 \cdot 12$

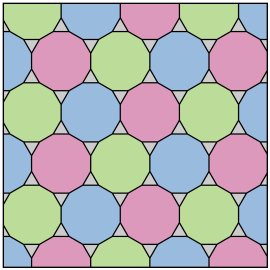


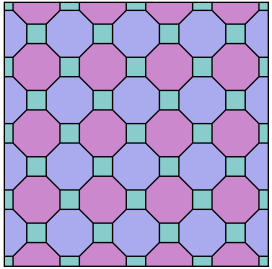


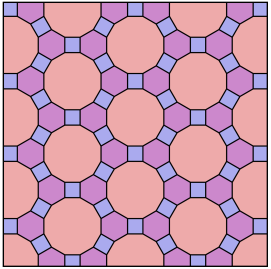








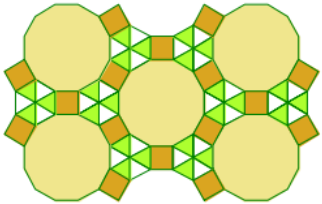
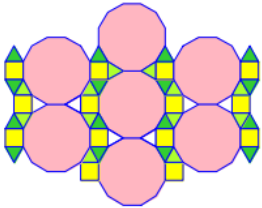
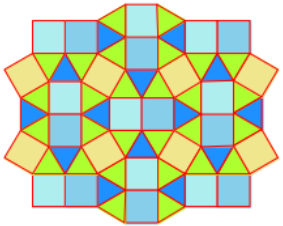


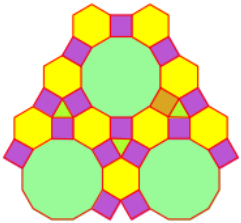


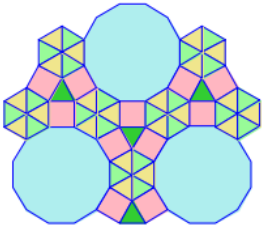
- Tesselações demirregulares

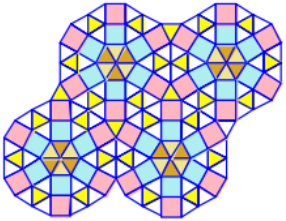
  Tesselações feitas com dois ou mais polígonos regulares, mas cujo padrão em cada vértice não é o mesmo são chamadas de tesselações demirregulares. Existem 14 possíveis tesselações nessa categoria.

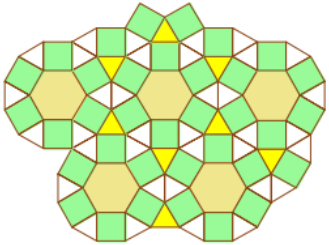
  Algumas das tesselações demirregulares são:

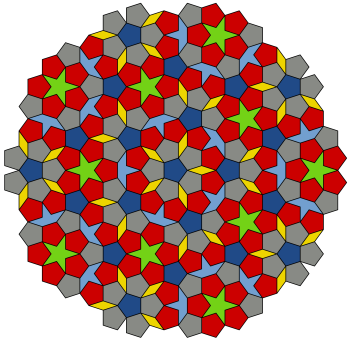


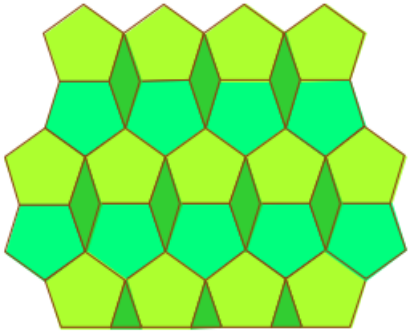






- Tesselações irregulares
  Tesselações feitas com dois ou mais polígonos, podendo estes ser regulares e irregulares são chamadas tesselações irregulares. Alguns exemplos são:





- Tesselações periódicas e aperiódicas
  As tesselações podem ser classificadas também quanto à existência de um padrão que se repete.

  - As tesselações que possuem padrões que se repetem são conhecidas como periódicas.

  - As tesselações que não possuem nenhum padrão que se repete periodicamente são chamadas de aperiódicas ou não-periódicas.

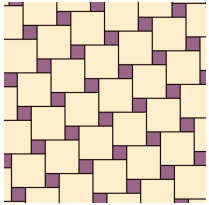


Figura: Uma tesselação periódica

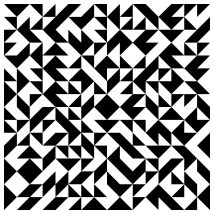


Figura: Uma tesselação aperiódica

Tesselações pentagonais

- Tesselações monoédricas
  As tesselações pentagonais nasceram da ideia de criar ladrilhamentos monoédricos para o plano, ou seja, pavimentações que utilizassem apenas um tipo de ladrilho, chamado nesse caso de protoladrilho. As tesselações regulares são monoédricas.

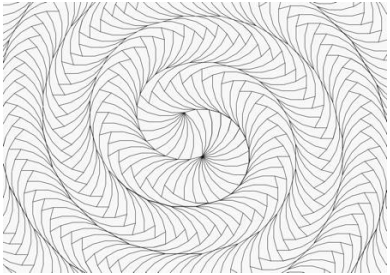
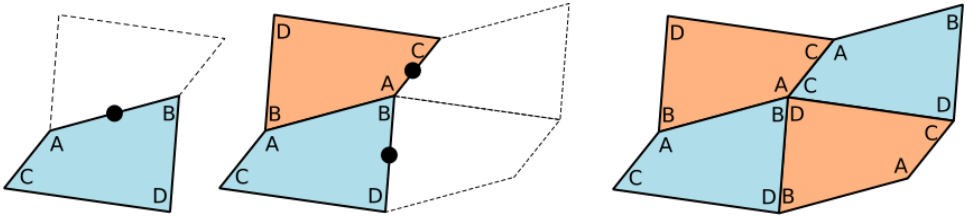


Figura: Uma tesselação monoedral

- Tesselações por triângulos e quadriláteros
  Todos os quadriláteros e todos os triângulos geram tesselações monoedrais. De fato, dado um triângulo arbitrário, é possível construir um paralelogramo, e claramente este gera uma tesselação. Também, dado um quadrilátero arbitrário, pode-se construir uma tesselação, seguindo o processo abaixo:

- Tesselações por triângulos e quadriláteros
  Todos os quadriláteros e todos os triângulos geram tesselações monoedrais. De fato, dado um triângulo arbitrário, é possível construir um paralelogramo, e claramente este gera uma tesselação. Também, dado um quadrilátero arbitrário, pode-se construir uma tesselação, seguindo o processo abaixo:



É possível criar tesselações monoedrais com polígonos convexos que tenham no máximo 6 lados. Tal resultado foi demonstrado pelo matemático alemão Karl Reinhardt em 1927.
Reinhardt mostrou em sua tese de doutorado *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone* (Sobre a decomposição do plano em polígonos), em 1918, que existiam apenas 3 tesselações hexagonais com polígonos convexos não-regulares, e apresentou 5 tesselações pentagonais com polígonos convexos não-regulares.

Figura: Karl August Reinhardt (1895 - 1941)

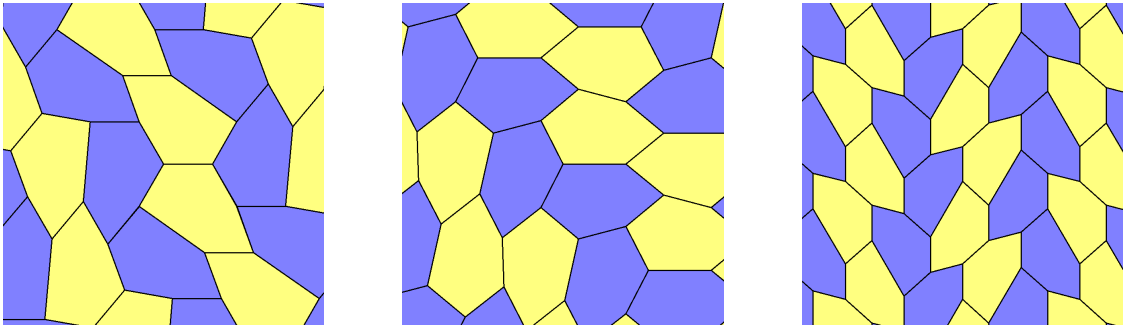
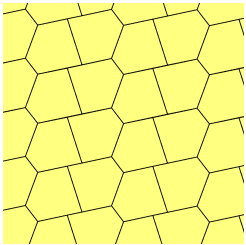


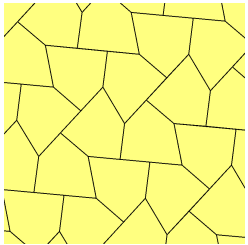
Figura: As três tesselações hexagonais

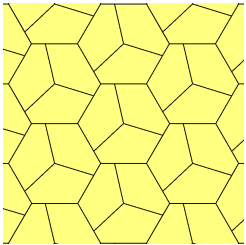
Mais tarde, outros padrões de tesselações pentagonais foram descobertos.

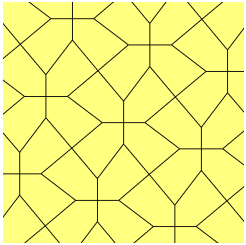
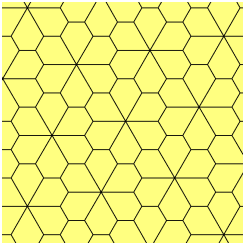
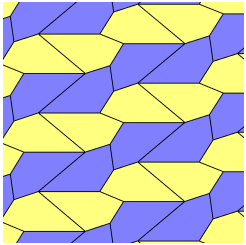
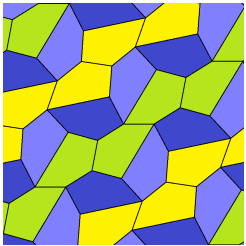
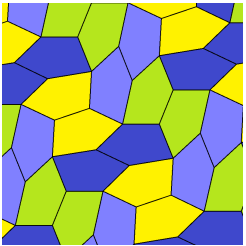
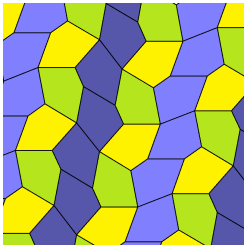
- Richard Kershner descobriu 3 padrões em 1968;
- Richard E. James III descobriu 1 padrão em 1975;
- Marjorie Rice descobriu 4 padrões em 1977;
- Rolf Stein descobriu 1 padrão em 1985;
- Casey Mann, Jennifer McLoud, e David Von Derau descobriram 1 padrão em 2015.

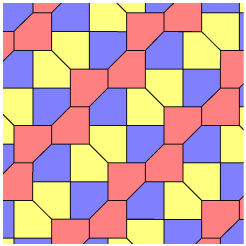
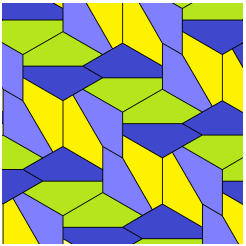
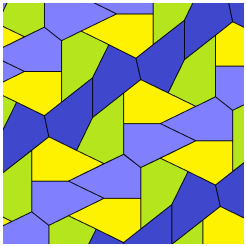
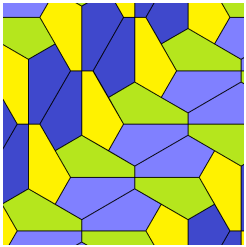
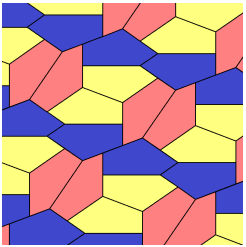
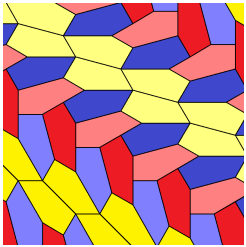
Em 28 de julho de 2017, o matemático francês Michaël Rao publicou o artigo *Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane*, em que demonstrou que existem apenas 15 tesselações pentagonais monoedrais convexas. Tal artigo ainda está sob análise, mas é provável que esteja correto.
As 15 tesselações pentagonais conhecidas são:







Mosaicos de Penrose

Os mosaicos de Penrose, estudados pelo matemático e físico Roger Penrose, são exemplos de tesselações não periódicas geradas por um conjunto aperiódico de protoladrilhos.
Tais mosaicos possuem propriedades interessantes:

- É aperiódica;
- Qualquer região finita do mosaico aparece um número infinito de vezes na tesselação;
- Está presente na estrutura dos quasicristais.

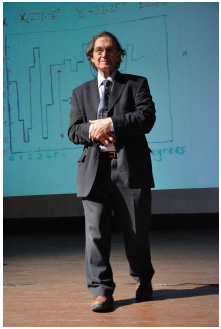
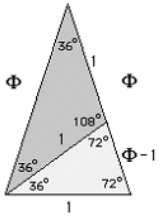
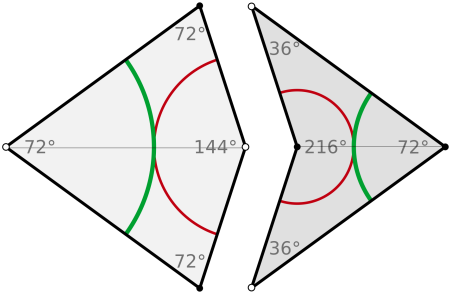


Figura: Roger Penrose (1931 -)

Os
mosaicos de Penrose são formados a partir de um triângulo isósceles de lados iguais a $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1,618033989...$ conhecida como Razão Áurea. Esse triângulo é dividido em dois, e unidos formam os dois protoladrilhos fundamentais de Penrose, conhecidos como dart (dardo) e kite (pipa).





- Construindo o mosaico de Penrose

  Uma regra para formar o mosaico de Penrose consiste em colocar pontos de duas cores diferentes nos vértices dos dardos e das pipas com a convenção que somente podem coincidir vértices da mesma cor. O matemático John Horton Conway propôs como estratégia para a construção do mosaico de Penrose pintar arcos circulares de cores diferentes nas peças; a união dos lados somente é permitida se resulta na união de arcos da mesma cor.

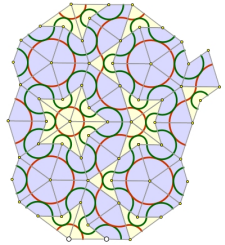
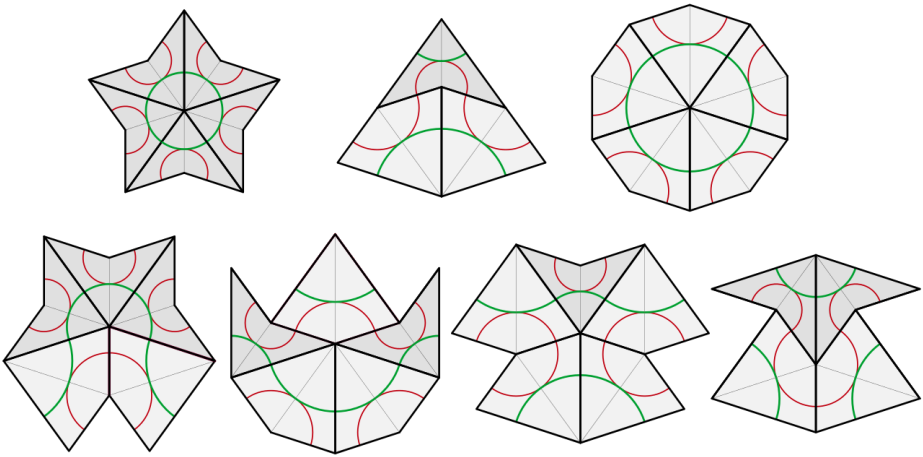


Figura: Nota-se que tais peças só podem ser unidas quando formamos arcos com cores iguais

A partir de tais regras, podem se formar os 7 seguintes padrões:



Podemos também enxergar a construção de um mosaico de Penrose como um processo iterativo.

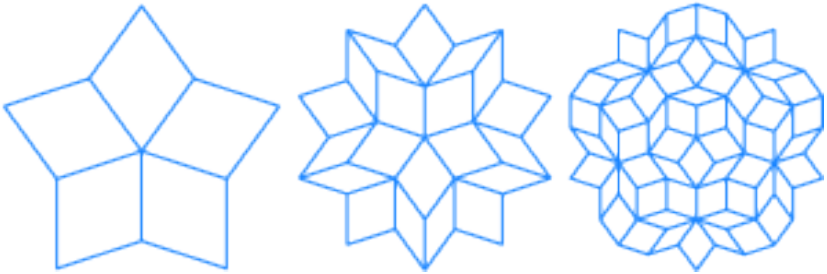
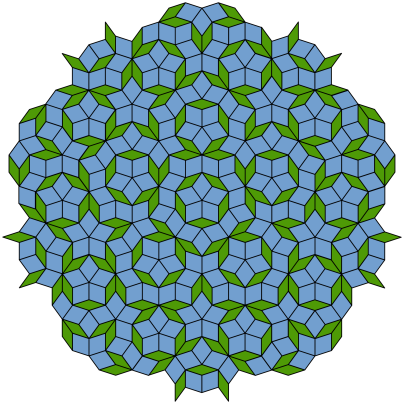
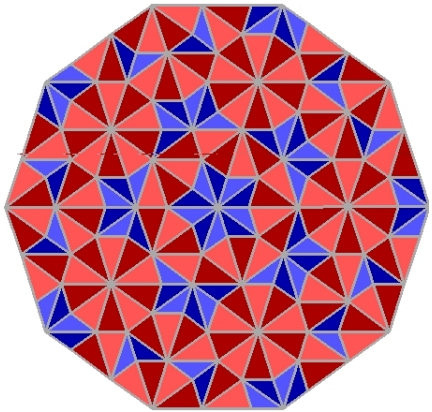


Figura: Iterações para gerar um mosaico de Penrose

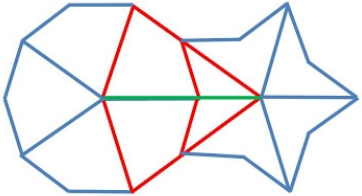
Alguns mosaicos de Penrose são:





Site interativo do Geogebra sobre tesselações:

http://www.geogebra.org/m/kkHKJzBX# material/Jd5ZSCSj



Referências I

[1] R. M. BARBOSA, *Descobrindo Padrões em Mosaicos*, São Paulo, Atual, 1993.

[2] B. BOLLOBAS, *Filling the plane with congruent convex hexagons without overlapping*, Annals Universitatis Scientiarum Budapestinensis, 1963.

[3] R. F. C. R. CASTRO, *Pavimentações no Plano Euclidiano*, Monografia, UFMG, 2008.

[4] L. R. DANTE, *Criatividade e resolução de Problemas na prática educativa matemática*, trabalho de Livre-Docência, UNESP, Rio Claro, 1988.

[5] M. GARDNER, *On tessellating the plane with convex polygon tiles*, Sci- entific American, 112-117, 1975.

[6] R. PENROSE, *La nueva mente del emperador*. Madrid: Mondadori, 1991.

[7] K. REINHARDT, *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*, Dissertation der Naturwiss, Universität Frankfurt, 1918.

Referências II

[8] G. E. MARTIN, *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, p. 119, 1982.

[9] W. MATTOS, *Desvendando a técnica de M.C. Escher*. Disponível em <https://waltermattos.com/tutoriais/desvendando-a-tecnica-de-escher/>

[10] M. R. SANTOS, *Aprendendo Tesselações de forma lúdica*, VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2004.

[11] J. SAVARD, *Teselaciones Pentagonales*. Diponível em <http://www.quadibloc.com/math/pen01.htm>

[12] T. STONA, *Tesselação, pavimentação ou mosaico*. Disponível em <https://www.ime.usp.br/~thaicia/quasicristais/Tess.html>

[13] T. SUGIMOTO, T. OGAWA, *Properties of Tilings by Convex Pentagons*, Forma, 21, 113-128, 2006.

Referências III

[14] WIKIHOW, *Como fazer uma tesselação aperiódica*. Disponível em <https://pt.wikihow.com/Fazer-Tessela%C3%A7%C3%A3o-Aperi%C3%B3dica>.

Obrigado!